XVIII Olimpíada Ibero-americana de Matemática
Segundo Dia
17 de Setembro de 2003

4. Seja $M = \{1,2,\ldots,49\}$ o conjunto dos primeiros 49 inteiros positivos. Determine o maior inteiro k tal que o conjunto M tenha um subconjunto de k elementos em que não haja 6 números consecutivos. Para esse valor máximo de k, encontre a quantidade de subconjuntos de M, de k elementos, que tenham a propriedade mencionada.

5. No quadrado $ABCD$, sejam P e Q pontos pertencentes aos lados BC e CD respectivamente, distintos dos extremos, tais que $BP=CQ$. Consideram-se pontos X e Y, $X \neq Y$, pertencentes aos segmentos AP e AQ respectivamente. Demonstre que, quaisquer que sejam X e Y, existe um triângulo cujos lados têm os comprimentos dos segmentos BX, XY e DY.

6. Definem-se as sucessões $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ por:

$$a_0 = 1, \quad b_0 = 4 \quad \text{e}$$

$$a_{n+1} = a_n^{2001} + b_n, \qquad b_{n+1} = b_n^{2001} + a_n \quad \text{para } n \geq 0.$$

Demonstre que 2003 não divide nenhum dos termos destas sucessões.

Duração: 4 ½ horas
Cada problema vale sete pontos **Versão em português**